

Correction Série 1

1 Recurrences

Exercice 1. Le principe de recurrence est la proposition suivante :

Proposition 1. Soit $\mathcal{N} \subset \mathbb{N}$ un sous-ensemble de l'ensemble des entiers et $n_0 \geq 0$ un entier. On suppose que les deux conditions suivantes sont verifiees

1. $n_0 \in \mathcal{N}$,
2. et que si $n \in \mathcal{N}$ alors $n + 1 \in \mathcal{N}$ ($n + 1$ est ce qu'on a appele le "successeur" de n construit pendant le cours : en termes d'ensembles

$$n + 1 = \bigcup_{\{n, \{n\}\}} = \{0, 1, \dots, n - 1, n\}$$

mais on peut simplement y penser en terme d'entier comme on en a l'habitude).

Alors on a

$$\mathbb{N}_{\geq n_0} = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} \subset \mathcal{N}.$$

1. Demontrer cette proposition (dans le langage "classique" avec les objets notion et raisonnement dont vous avez l'habitude ; sans utiliser le langage formel de la logique des predicats du premier ordre...).

Solution 1. Il faut demontrer que $\mathbb{N}_{\geq n_0} \subset \mathcal{N}$. Dans le cours on a vu que \mathbb{N} est defini comme l'ensemble qui contient 0 et tous les successeurs (ca veut dire : le successeur de 0, le successeur de successeur, le successeur de successeur de successeur..). En premier on note que $n_0 \in \mathcal{N}$ par la premiere hypothese de la Proposition. Maintenant on suppose qu'il y a un nombre $m > n_0$ qui n'est pas compris dans \mathcal{N} . On sait que m est le $m - n_0$ successeur de n_0 . Alors en appliquant la deuxieme condition $m - n_0$ fois on peut conclure que m est dans \mathcal{N} . Contradiction. Ainsi $\mathbb{N}_{\geq n_0} \subset \mathcal{N}$.

Exercice 2. Utiliser le principe de recurrence ci-dessus pour demontrer les resultats suivants

1. Pour tout entier $n \geq 1$

$$\Sigma_1(n) := 1 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

En deduire que pour tout $n \geq 1$

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

2. Redemontrer ce dernier resultat a l'aide du principe de recurrence.
3. Pour tout entier $n \geq 0$

$$\Sigma_2(n) := 1^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution 2.

1. On definit l'ensemble \mathcal{N} par

$$\mathcal{N} := \left\{ m \in \mathbb{N} : m \geq 1 \text{ et } \Sigma_1(m) = \frac{m(m+1)}{2} \right\}$$

Si on peut montrer que cet ensemble satisfait Proposition 1 avec $n_0 = 1$, on peut conclure que $\mathbb{N}_{\geq 1} \subset \mathcal{N}$. Ainsi tous entiers naturel positive satisfont la condition $\Sigma_1(m) = \frac{m(m+1)}{2}$. Il reste a montrer les deux conditions de la Proposition 1.

Pour le premier condition : On a $1 \in \mathcal{N}$ parce que $\Sigma_1(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Pour le deuxieme condition : Si $n \in \mathcal{N}$ on sait que $\Sigma_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}$. Alors

$$\begin{aligned} \Sigma_1(n+1) &= 1 + \dots + n + 1 \\ &= \Sigma_1(n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Ainsi $n+1 \in \mathcal{N}$. On a alors demontré le premier part de l'exercice 2.1.

Pour le deuxieme part on veut demontrer que

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2.$$

On note que

$$\begin{aligned}
 1 + 3 + \dots + (2n - 1) &= 1 + 2 + 3 + \dots + 2n - 2 - 4 - \dots - 2n \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} k - \sum_{j=1}^n 2j \\
 &= \sum_{k=1}^{2n} -2 \sum_{j=1}^n j \\
 &= \frac{2n(2n+1)}{2} - 2 \frac{n(n+1)}{2} \text{ par le premier part} \\
 &= n^2
 \end{aligned}$$

2. On définit l'ensemble \mathcal{N} par

$$\mathcal{N} := \{m \in \mathbb{N} : m \geq 1 \text{ et } \sum_{k=1}^m (2k - 1) = m^2\}.$$

Maintenant on vérifie les deux conditions de la Proposition 1. On a que $1 \in \mathcal{N}$, car $1 = 1^2$. Si $n \in \mathcal{N}$ on a que

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

En ajoutant $2(n + 1) - 1$, c'est-à-dire $2n + 1$, on obtient

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2,$$

ce qui montre l'égalité pour $n + 1$. Ainsi $n + 1 \in \mathcal{N}$. Ainsi l'égalité est vraie pour tout entier ≥ 1 par Proposition 1.

3. On définit l'ensemble \mathcal{N} par

$$\mathcal{N} := \{m \in \mathbb{N} : m \geq 0 \text{ et } \Sigma_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\}.$$

On vérifie les deux conditions de la Proposition 1. On a que $0 \in \mathcal{N}$, car $0 = 1 \frac{0(1)(3)}{6}$. Si $n \in \mathcal{N}$ on a que

$$\Sigma_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
 \Sigma_2(n+1) &= 1^2 + \dots + (n+1)^2 \\
 &= \Sigma_2(n) + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\
 &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)(n+1)}{6} \\
 &= \dots = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}
 \end{aligned}$$

Ainsi $n + 1 \in \mathcal{N}$. Ainsi l'égalité est vraie pour tout entier ≥ 0 par Proposition 1.

Exercice 3. Soit $x > -1$ un nombre reel. Montrer en utilisant le principe de recurrence que pour tout entier $n \geq 1$

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \quad (\text{Inegalite de Bernoulli})$$

Solution 3. On peut encore definir l'ensemble \mathcal{N} par

$$\mathcal{N} := \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \text{ et } (1 + x)^n \geq 1 + nx\}.$$

Maintenant on montre les conditions de la Proposition 1. Évidemment pour $n = 1$ l'inégalité de Bernoulli est vraie. Supposons alors que $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Alors, pour $n + 1$, on a :

$$\begin{aligned} (1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n(1 + x) \\ &\geq (1 + nx)(1 + x) \quad (\text{on utilise l'hypothèse et que } (1 + x) > 0) \\ &= 1 + (n + 1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n + 1)x \quad (\text{car } nx > 0). \end{aligned}$$

Ainsi l'inégalité est vraie pour tout entier ≥ 1 .

2 Ensembles

Exercice 4. On rappelle que si E est un ensemble, la reunion de E , \bigcup_E est l'ensemble dont les elements sont exactement les elements des elements de E (on rappelle que ces elements sont eux-meme des ensembles qui peuvent donc posseder des elements).

1. Soit $A \neq \emptyset$ un ensemble non vide, montrer que

$$\bigcup_{\{A\}} = A.$$

2. Que valent

$$\bigcup_{\emptyset}, \bigcup_{\{\emptyset\}}, \bigcup_{\{\emptyset, A\}} ?$$

3. Que vaut $A \cup \emptyset$?

Solution 4.

- On va montrer l'égalité par double inclusion. On commence avec $x \in \bigcup_{\{A\}}$. Par définition ça veut dire que x est un élément d'un élément de $\{A\}$. Plus concrètement : Les éléments de $\{A\}$ sont A , alors x est un élément de A . Ainsi $x \in A$ et avec ça x est contenue dans la côté droite et on a fini la première inclusion. Pour l'autre inclusion on prends un $y \in A$. Si $y \in A$, on sait que y est un élément d'un élément de $\{A\}$. Ainsi par la définition de la réunion $y \in \bigcup_{\{A\}}$ et on peut conclure l'autre inclusion.
- \emptyset, \emptyset et A
- A

Exercice 5. Soit X un ensemble. Pour A, B des sous-ensembles de X on défini la différence de A et B

$$A - B := \{x \in A, x \notin B\} \subset X$$

(les éléments de A qui ne sont pas des éléments de B). En particulier

$$X - A = \{x \in X, x \notin A\} \subset X$$

(l'ensemble des éléments de X qui ne sont pas dans A) est appelle le *complémentaire* de A dans X et est note A^c .

On défini alors la différence *symétrique* de A et B en posant

$$A \Delta B := A \cup B - A \cap B = \{x \in A \cup B, x \notin A \cap B\} \subset X$$

(les éléments de X qui sont dans la réunion de A et B et qui ne sont pas dans leur intersection).

- Montrer que $A \Delta B = B \Delta A = (A - B) \cup (B - A)$.
- Calculer $\emptyset \Delta A, A \Delta A, A \Delta X, A \Delta A^c$.

Solution 5.

-

$$\begin{aligned} A \Delta B &= \{x \in A \cup B, x \notin A \cap B\} \\ &= \{(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } (x \notin A \cap B)\} \\ &= \{(x \in A \text{ et } x \notin A \cap B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A \cap B)\} \\ &= \{(x \in A \text{ et } x \notin B) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \notin A)\} \\ &= \{(x \in A \text{ et } x \notin B)\} \cup \{(x \in B \text{ et } x \notin A)\} \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

Peut être également démontré par double inclusion.

2. $\emptyset \Delta A = A$, $A \Delta A = \emptyset$, $A \Delta X = A^c$, $A \Delta A^c = X$

Exercice 6. On considère l'application polynomiale (dite de Cantor)

$$C : (m, n) \in \mathbb{N}^2 \mapsto ((m+n)^2 + m + 3n)/2 \in \mathbb{N}.$$

1. Vérifier que C est bien une application de \mathbb{N}^2 vers \mathbb{N} .
2. Calculer les valeurs $C(m, n)$ pour $m+n \leq 3$ et les reporter sur les points $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ d'une représentation du quart de plan $\{(x, y), x, y \geq 0\}$.
3. Pour $k \geq 0$ un entier, on définit le sous-ensemble

$$D_k = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2, m+n = k\}.$$

Quelles sont les valeurs prises par $C(m, n)$ quand (m, n) décrit D_k ?

4. En déduire que pour tout entier $l \in \mathbb{N}$ il existe (m, n) tel que

$$C(m, n) = l$$

et que un tel couple (m, n) est unique. On dit que l'application polynomiale $C : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ est une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N} .

Remarque. Une autre application possible (obtenue par symétrie) est

$$C'(m, n) = ((m+n)^2 + 3m + n)/2.$$

On ne sait pas si il y existe d'autres applications polynomiales établissant une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N} .

Solution 6.

1. Rappelons nous d'abord de quelques faits utiles. Pour $n, m \in \mathbb{N}$:
 - Si n et m sont tous les deux pairs ou tous les deux impairs alors $n+m$ est pair :
 Dans le premier cas on écrit $n = 2p$ et $m = 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$, puis on voit facilement que $n+m = 2(\underbrace{p+q}_{\in \mathbb{N}})$ est pair.
 Dans le deuxième cas on écrit $n = 2p+1$, $m = 2q+1$ et alors $n+m = 2(\underbrace{p+q+1}_{\in \mathbb{N}})$, ce qui montre à nouveau la parité.
 - Si n est pair et m est impair alors $n+m$ est impair (par un raisonnement similaire au précédent).
 - Le carré d'un entier pair est pair :
 De même qu'avant, on écrit $n = 2p$ et alors $n^2 = 4p^2 = 2 \cdot \underbrace{2p^2}_{\in \mathbb{N}}$ donc n^2 est pair.

- Le carré d'un entier impair est impair :

De même qu'avant, on écrit $n = 2p + 1$ et alors $n^2 = 4p^2 + 4p + 1 = 2 \cdot \underbrace{2p^2 + 2p}_{\in \mathbb{N}} + 1$ donc n^2 est impair.

Maintenant on veut montrer que $(m+n)^2 + m + 3n$ est toujours pair en faisant une grande disjonction des cas sur la parité de n et m :

- n et m pairs : alors $m+n$ et $m+3n$ sont pairs, donc $(m+n)^2 + m + 3n$ est aussi pair et donc $C(m,n) \in \mathbb{N} \checkmark$
- n et m impairs : pareil qu'au dessus \checkmark
- n pair et m impair : alors $n+m$ est impair, $(n+m)^2$ aussi, et $m+3n$ aussi, donc $(m+n)^2 + m + 3n$ est pair et $C(m,n) \in \mathbb{N} \checkmark$
- n impair et m pair : pareil qu'au dessus \checkmark

2. Les paires possibles sont

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}^2 \mid n+l \leq 3\} = \{(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (3,0)\}$$

Les valeurs de $C(m,n)$ sont données par le tableau ci-dessous :

$n \backslash m$	0	1	2	3
0	0	1	3	6
1	2	4	7	
2	5	8		
3	9			

3. Remarquons tout d'abord qu'on peut ré-écrire $D_k = \{(m, k-m) \mid 0 \leq m \leq k\}$.

Alors $\forall (m, k-m) \in D_k : C(m, k-m) = \frac{(m+k-m)^2 + 3m+k-m}{2} = \underbrace{\frac{k^2+k}{2}}_{=:c_k} + m$ et

donc

$$C(D_k) = \{c_k + m \mid 0 \leq m \leq k\} = \llbracket c_k, c_k + k \rrbracket$$

(les doubles crochets symbolisent des intervalles d'entiers).

Nous avons défini la grandeur c_k pour pouvoir exprimer plus simplement la relation suivante : $\forall k \in \mathbb{N}, c_{k+1} = c_k + k + 1$. En effet $\frac{k^2+k}{2} + k + 1 = \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)^2+(k+1)}{2}$.

Ainsi, tous les intervalles $C(D_k)$ sont contigus, et ne se chevauchent pas (si l'intervalle $C(D_k)$ se termine à la borne a , alors l'intervalle $C(D_k)$ commence à la borne $a + 1$). Comme ils commencent à 0 et leur taille ne fait qu'augmenter, ils couvrent tout \mathbb{N} et ils en créent une partition :

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} C(D_k)$$

On pourrait aussi le voir à partir du fait que la suite $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et tend vers $+\infty$ donc

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}}]c_k, c_{k+1}[= \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} C(D_k)$$

4. Tout d'abord, $\forall k \in \mathbb{N}$, la restriction $C|_{D_k} : D_k \rightarrow C(D_k)$ est bijective puisqu'elle est définie de manière "affine" : $C(m, k - m) = c_k + m$. Ensuite, pour montrer que C elle-même est bijective on n'a qu'à montrer que chaque élément $y \in \mathbb{N}$ a un unique antécédent par C . C'est le cas puisque les ensembles $C(D_k), k \in \mathbb{N}$ forment une partition de \mathbb{N} , donc $\exists ! k_y \in \mathbb{N} : y \in C(D_{k_y})$. Mais alors comme C est bijective lorsque restreinte à D_{k_y} , y a un unique antécédent dans D_{k_y} et donc dans \mathbb{N}^2 . S'il y en avait un autre dans $D_{k'}$ alors on aurait $\{y\} \subseteq C(D_{k_y}) \cap C(D_{k'})$ et donc l'intersection n'est pas vide comme on l'a montré dans la question précédente.

Ainsi $C : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ est bien bijective. □